DEUXIÈME INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES

Durée: 4 heures

Nota: les cinq sujets sont indépendants et peuvent être traités, à la rigueur, dans un ordre quelconque, sous réserve d'indiquer très distinctement *leur numéro. Leur 5ème question est, en général, la plus difficile. Dans la rédaction des copies, les candidats sont priés de bien vouloir* encadrer *chacun des résultats correspondants aux éléments* encadrés *dans les énoncés.*

SUJET 1

On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n \geq 1$. On introduit le ***reste*** **d'ordre n, soit** $r_n = \sum_{q=n+1}^{\infty} u_q$. On admet le résultat $r_0 = \sum_{q=1}^{\infty} u_q = \ell n 2$.

1 Établir que $r_n = (-1)^n \int_0^1 \dfrac{t^n}{1+t}\,dt$. [On peut partir de $\sigma_{n,p} = \sum_{q=n+1}^{q=n+p} u_q$, avec $u_q = \int_0^1 (-t)^{q-1} dt$.]

2 Trouver A tel que $|r_n| \sim \dfrac{A}{n}$. [On peut intégrer par parties $|r_n| = \int_0^1 \dfrac{1}{1+t}\,d\left(\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\right)\ldots$]

3 Prouver que la série $\sum_{n\geq 0} r_n$ converge et déterminer sa somme S. [Partir de $R_n = \sum_{k=0}^{n} r_k$.]

4 Si $x \in]-1,1[$, montrer que $f(x) = \sum_{n\geq 0} r_n x^n$ vaut $\dfrac{\lambda + \mu\, \ell n(1+x)}{1-x}$, où l'on précisera les constantes λ, μ. Ce résultat est-il en accord avec la valeur de S précédemment trouvée?

5 On se propose de calculer $T = \sum_{n\geq 0} r_n^2$. On admet les égalités suivantes, où $\Delta = [0;1]^2$:

$$T = \sum_{n\geq 0} \left(\int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t}\right)\left(\int_0^1 \frac{u^n du}{1+u}\right) = \sum_{n\geq 0} \iint_{\Delta} \frac{t^n u^n\, dt\, du}{(1+t)(1+u)} = \int_0^1 \frac{\varphi(t)\,dt}{1+t}, \text{ avec } \varphi(t) = \int_0^1 \frac{du}{(1+u)(1-tu)},\ t \in [0;1[.$$

Calculer $\varphi(t)$. En déduire la valeur de T.

SUJET 2

A toute fonction f, continue sur $[0,1]$, on associe $F(x) = \mathbb{T}(f)(x) = \int_0^1 \frac{f(t)\,dt}{x+t}$, avec $x>0$.

1 Soit $f(t) = t^n$ et $I_n(x) = \mathbb{T}(f)(x) = \int_0^1 \frac{t^n\,dt}{x+t}$, $n\in\mathbb{N}$. Expliciter $I_0(x)$ et $I_n(x) + xI_{n-1}(x)$, $n\geq 1$.

2 En déduire que $I_n(x) = (-x)^n\{\ell n(1+\frac{1}{x}) - P_n(\frac{1}{x})\}$, où $P_n(Y)$ est un polynôme à préciser.

3 Pour $f(t) = e^t$, montrer que $F'(x)+F(x)$ vaut une certaine fraction rationnelle $R(x)$.

4 En déduire, dans ce cas, que $F(x) = u(x)\ell n\frac{1}{x} + v(x)$, où u et v sont à exprimer à l'aide de $H(x) = \int_0^x \frac{e^t-1}{t}dt$ et $K(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+t}dt$. Pourrait-on développer u et v en séries entières ?

5 Si $f(0) > 0$, montrer que $F(x)\sim f(0).\ell n\,\frac{1}{x}$, $x\to 0$, $x>0$. [Partir de $\mathbb{T}(f) = \mathbb{T}(f(0)) + \mathbb{T}(f(t)-f(0))$.]

SUJET 3

On définit, sur $\mathbf{R}^2$, la fonction f telle que $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, avec $f(0,0)=0$, et l'équation différentielle $(\star)$: $y'=f(x,y)$, avec $x>0$ et $y>0$.

1 Cette fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

2 On effectue dans $(\star)$ le changement de variable $t=\frac{x}{y}$. Montrer que $(\star)$ devient une équation différentielle à variables séparables en y et t, que l'on intégrera pour $t\in]0,+\infty[$. On présentera le résultat en paramétriques: $x = \lambda\alpha(t)$, $y = \lambda\beta(t)$, λ étant une constante réelle convenable, et les fonctions α et β étant à préciser.

3 Démontrer maintenant l'existence d'une unique solution $y=\varphi(x)$ de $(\star)$ pour $x\in]0,+\infty[$, telle que $\varphi(1)=1$. Établir que la ***fonction réciproque*** ψ de φ, telle donc que $x = \psi(y)$, est d'une forme élémentaire que l'on déterminera.

4 On prolonge $\varphi(x)$ par continuité en $x=0$. Préciser $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$.

5 Prouver l'existence de 2 constantes K et k, à déterminer, telles que $\varphi(x)\sim Kx(\ell nx)^k$, $x\to+\infty$.

SUJET 4

Soit $y = f(x) = \sqrt{x^2-1}$, x réel >1.

[1] Établir que $\frac{d^n}{dx^n} f(x) = f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2-1)^{n-1/2}}$, où P_n est une fonction polynômiale.

[2] Préciser le monôme de plus haut degré de $P_n(x)$. [Distinguer les cas $n=0$, $n=1$ et $n\geq 2$.]

[3] Établir que $P_{n+1}(x) + A_n(x).P_n(x) + B_n(x).P_{n-1}(x) = 0$, où $A_n(x)$ et $B_n(x)$ sont des polynômes à préciser. [Prouver $(x^2-1)f'(x) = xf(x)$, et lui appliquer la formule de Leibniz $\frac{d^n}{dx^n}\{u(x).v(x)\} = \ldots$]

[4] Démontrer que $P_n'(x) = -n(n-2)P_{n-1}(x)$ pour tout $n\geq 1$. Calculer $P_n(1)$.

[5] De ce tout ce qui précède, déduire que $(-1)^{n-1}f^{(n)}(x) > 0$ si $n\geq 2$.

SUJET 5

[1] Pour tout réel $x\geq 0$, préciser le réel $\theta_2 = \theta_2(x) \in [0;1]$, tel que $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2.\theta_2$.

[2] On considère la suite $t_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{n^2+k}$, $n\geq 1$. Déterminer des réels a et b tels que $t_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$. [On peut écrire $\frac{1}{n^2+k} = \frac{1}{n^2(1+\frac{k}{n^2})}$ et utiliser [1].]

[3] On considère les séries de termes généraux $u_n = \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n}$ et $v_n = (-1)^n t_n$, de sommes partielles respectives $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$. Établir que $U_{n^2+2n} = V_n$. [Le symbole $E(t)$ désigne le plus grand entier $\leq t$, ou "partie entière" (par défaut) de t.]

[4] Démontrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

[5] Plus généralement, soit (a_n) une suite réelle décroissante, de limite nulle (donc $a_n\geq 0$), telle que la série $\sum a_{n^2}$ converge. Montrer que la série $\sum (-1)^{E(\sqrt{n})} a_n$ converge. [Introduire $b_n = \sum_{k=0}^{2n} a_{n^2+k}$.]